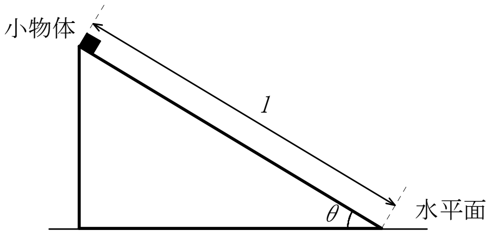
図のように水平な平面上に，傾角 θ の斜面を持つ質量 M の台が置かれている。斜面の長さは l である。斜面の上端に質量 m の小物体を静かに置くと下端まですべり，この間，台は静止したままであった。水平面と台との間の静止摩擦係数を μ_1，重力加速度の大きさを g として以下の問に答えよ。



〔A〕斜面がなめらかである場合を考える。

(1)小物体が斜面の下端に達する直前の速さを求めよ。

(2)小物体が斜面をすべっている間，台に水平面から働く静止摩擦力の大きさと向きを求めよ。

(3)台が動かないためには，静止摩擦係数 μ_1 はいくら以上である必要があるか求めよ。

(4)小物体が滑り始めてから下端に達する直前までに，水平面から台に働く摩擦力の力積の大きさと向きを求めよ。

(5)小物体と台からなる物体系を考える。この物体系に働く外力のうち，鉛直方向の成分を持つ力を全て挙げよ。また，小物体が滑り始めてから下端に達する直前までに，外力の鉛直成分の力積の和の大きさと向きを求めよ。

〔B〕斜面があらく小物体との間の動摩擦係数が μ_2 である場合を考える。

(6)小物体が斜面の下端に達する直前の速さを求めよ。

(7)小物体が斜面をすべっている間，水平面から台に働く静止摩擦力の大きさと向きを求めよ。

(8)台が動かないためには，静止摩擦係数 μ_1 はいくら以上である必要があるか求めよ。

(解説)小物体と台に働く力を整理して解くこと。小物体に働く力の斜面に垂直な方向の成分はつりあっている。台は，水平，鉛直方向のつりあいを考えると解きやすい。

力積は，

力積＝力×時間

で求めてもよいが，運動量の関係からも求まる。

物体の運動量の変化＝力積

である。さらに複数の物体からなる物体系では，

物体系全体の運動量の変化＝外力の力積

となる。力積(運動量も)はベクトルであるので，鉛直，水平に分けて考えればよい。

(1)下端に達する直前の小物体の速さを v とする。力学的エネルギー保存則より

$$mgl\sin\theta = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \therefore \quad v = \sqrt{2gl\sin\theta} \qquad \cdots(答)$$

(別解)小物体の斜面に平行下向きの加速度を a として，運動方程式より

$$ma = mg\sin\theta \qquad \therefore \quad a = g\sin\theta$$

等加速度運動の公式より

$$v^2 = 2al \qquad \therefore \quad v = \sqrt{2al} = \sqrt{2gl\sin\theta}$$

(2)小物体と斜面の間の垂直抗力の大きさを N とすると、小物体に働く力の斜面に垂直な方向のつりあいより

$$N = mg\cos\theta$$

また台に働く力は図１となる。ただし，台に水平面から働く静止摩擦力を f，垂直抗力を R とする。台に働く力の水平方向のつりあいより

$$f - N\sin\theta = 0$$

$$\therefore \quad f = N\sin\theta = mg\sin\theta\cos\theta \qquad \cdots① \qquad \cdots(答)$$

向きは　右向き　…(答)

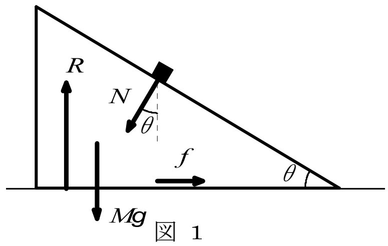


図 1

(3)台に働く力の鉛直方向のつりあいより

$$R - Mg - N\cos\theta = 0$$

$$R = Mg + N\cos\theta = \left(M + m\cos^2\theta\right)g \qquad \cdots②$$

台が動かないためには，静止摩擦 f が最大静止摩擦 $\mu_1 R$ を超えなければよいので①，②式より

$$f \leqq \mu_1 R$$

$$mg\sin\theta\cos\theta \leqq \mu_1\left(M + m\cos^2\theta\right)g \qquad \therefore \quad \mu_1 \geqq \frac{m\sin\theta\cos\theta}{M + m\cos^2\theta} \qquad \cdots(答)$$

(4)小物体をはなしてから下端に達するまでの時間 t は

$$l = \frac{1}{2}at^2 \qquad \therefore \quad t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2l}{g\sin\theta}}$$

ゆえに，台に働く静止摩擦力 f の力積 I_f は

$$I_f = ft = mg\sin\theta\cos\theta \times \sqrt{\frac{2l}{g\sin\theta}} = m\cos\theta\sqrt{2gl\sin\theta} \qquad \cdots(答)$$

(別解)台と小物体からなる物体系を考えると，水平方向に働く外力は水平面からの静止摩擦力だけである。ゆえに，静止摩擦力の力積は，体系の水平方向の運動量変化である。はじめ体系の運動量は 0 で，小物体が下端に来たとき動いているのは小物体だけなので体系全体の運動量の変化の水平成分は

$$mv\cos\theta = m\cos\theta\sqrt{2gl\sin\theta}$$

これが，静止摩擦力の力積である。

(5)外力の内，鉛直成分を持つのは

小物体に働く重力，台に働く重力，水平面から台に働く垂直抗力　…(答)

(台と小物体との間の垂直抗力は内力である)

外力の鉛直成分の和 F_y は，下向きを正として

$$F_y = Mg + mg - R = Mg + mg - \left(M + m\cos^2\theta\right)g = m\left(1-\cos^2\theta\right)g = mg\sin^2\theta$$

ゆえにこの力の力積 I_y は

$$I_y = F_y t = mg\sin^2\theta \times \sqrt{\frac{2l}{g\sin\theta}} = m\sin\theta\sqrt{2gl\sin\theta}$$

(別解)台と小物体からなる物体系に働く外力の鉛直方向の成分の力積は，体系の鉛直方向の運動量変化である。ゆえに

$$m\upsilon\sin\theta = m\sin\theta\sqrt{2gl\sin\theta}$$

(6)小物体が滑っている間，小物体と台の間の垂直抗力は $N = mg\cos\theta$ で，摩擦のない場合と変わらない。斜面から小物体に働く動摩擦力の大きさは $\mu_2 N = \mu_2 mg\cos\theta$ である。小物体の力学的エネルギーの変化が，動摩擦が小物体にした仕事であるので，下端での速さを υ' として

$$\frac{1}{2}m\upsilon'^2 - mgl\sin\theta = -\mu_2 mg\cos\theta\cdot l$$

$$\therefore\quad \upsilon' = \sqrt{2gl\left(\sin\theta - \mu_2\cos\theta\right)}$$ …(答)

(別解)小物体の斜面に平行下向きの加速度を a' として，運動方程式より

$$ma' = mg\sin\theta - \mu_2 mg\cos\theta \qquad \therefore\quad a' = g\left(\sin\theta - \mu_2\cos\theta\right)$$

等加速度運動の公式より

$$\upsilon'^2 = 2a'l \qquad \therefore\quad \upsilon' = \sqrt{2a'l} = \sqrt{2gl\left(\sin\theta - \mu_2\cos\theta\right)}$$

(7)台に水平面から働く静止摩擦力を f'，垂直抗力を R' とすると，台に働く力は図 2 となる。台に働く力の水平方向のつりあいより

$$f' - N\sin\theta + \mu_2 mg\cos\theta\cdot\cos\theta = 0$$

$$\therefore\quad f' = mg\cos\theta\left(\sin\theta - \mu_2\cos\theta\right)$$ …③　…(答)

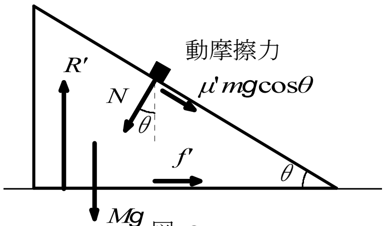


図 2

(8)台に働く鉛直方向のつりあいより

$$R' - Mg - N\cos\theta - \mu_2 mg\cos\theta\cdot\sin\theta = 0$$

$$\therefore\quad R' = \left\{M + m\cos\theta\left(\cos\theta + \mu_2\sin\theta\right)\right\}g$$ …④

台が動かないための条件は，③，④式も用いて

$$f' \leqq \mu_1 R'$$

$$mg\cos\theta\left(\sin\theta - \mu_2\cos\theta\right) \leqq \mu_1\left\{M + m\cos\theta\left(\cos\theta + \mu_2\sin\theta\right)\right\}g$$

$$\therefore\quad \mu_1 \geqq \frac{m\cos\theta\left(\sin\theta - \mu_2\cos\theta\right)}{M + m\cos\theta\left(\cos\theta + \mu_2\sin\theta\right)}$$ …(答)