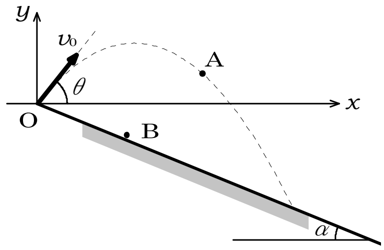
「折戸の物理」　今週の１問　http://orito-buturi.com/　NO.33(2009.12.28)

次の文章の［ (1) ］から［ (11) ］に適切な数式または数値を入れよ。

図１のように，水平面となす傾斜角が α の斜面があり，斜面上の１点Ｏを原点として，x 軸と y 軸をそれぞれ水平方向と鉛直方向にとる。 xy 平面(紙面)は斜面に垂直である。重力加速度の大きさを g〔m/s^2〕とする。また，斜面はなめらかである。



問１　大きさの無視できる質量 m〔kg〕の物体Ａを，時刻 0s に初速度の大きさ v_0〔m/s〕で，図１のように，原点Ｏから x 軸となす投射角 θ で xy 平面内に投げ上げた。ここで，投射角は $0° < \theta < 90°$ とする。物体Ａが斜面に衝突するまでの運動を考える。時刻 t〔s〕での物体Ａの速度の x 成分は［ (1) ］〔m/s〕，y 成分は［ (2) ］〔m/s〕である。また，このときの x 座標は［ (3) ］〔m〕，y 座標は［ (4) ］〔m〕である。

問２　原点Ｏに大きさの無視できる質量 M〔kg〕の物体Ｂをおき，時刻 0s に静かに離すと斜面をすべりはじめた。時刻 t〔s〕での速さは［ (5) ］〔m/s〕である。このときの原点Ｏから物体Ｂまでの距離は［ (6) ］〔m〕であり，物体Ｂの x 座標は［ (7) ］〔m〕，y 座標は［ (8) ］〔m〕である。

問３　時刻 0s に，初速度の大きさ v_0〔m/s〕，投射角 θ で，原点Ｏから物体Ａを xy 平面内に投げ上げた。それと同時に，原点Ｏに物体Ｂをおき静かに離した。時刻 t〔s〕に物体Ａと物体Ｂが斜面上で衝突するための条件は，

$$\begin{cases} [\ (3)\ ]=[\ (7)\ ] \\ [\ (4)\ ]=[\ (8)\ ] \end{cases}$$

である。これらの式を連立させて解くと，v_0 を含まない $\tan\theta =$ ［ (9) ］の関係が求まる。この関係から，物体Ａと物体Ｂが斜面上で衝突するための条件は，$\alpha + \theta =$ ［ (10) ］である。この条件が満たされていれば，v_0 がどんな値であっても物体Ａと物体Ｂは斜面上で衝突する。２つの物体が動きはじめてから斜面上で衝突するまでの時間 T〔s〕を，θ を用いずに，v_0，g，α を用いて表すと，$T =$ ［ (11) ］〔s〕である。

(解説)物体 A は放物運動。物体 B は等加速度直線運動である。(10)で数学的に解けなくても答だけは出せる。

問 1.物体 A の初速度の x 成分は $v_0\cos\theta$, y 成分は $v_0\sin\theta$ である。速度の x 成分を v_x, y 成分を v_y, 座標を x_A, y_Aとする。

(1)　$v_x = v_0\cos\theta$　　(2)　$v_y = v_0\sin\theta - gt$

(3)　$x_A = v_0\cos\theta\cdot t$　　(4)　$y_A = v_0\sin\theta\cdot t - \dfrac{1}{2}gt^2$

問 2. 物体 B の斜面に沿った加速度を a とすると, 運動方程式より

$$ma = mg\sin\alpha \qquad \therefore \quad a = g\sin\alpha$$

時刻 t での物体 B の速さを V, O から物体 B まで斜面に沿った距離を S, 座標を x_B, y_Bとする。

(5)　$V = at = g\sin\alpha\cdot t$

(6)　$S = \dfrac{1}{2}at^2 = \dfrac{1}{2}g\sin\alpha\cdot t^2$

(7)　$x_B = S\cos\alpha = \dfrac{1}{2}g\sin\alpha\cos\alpha\cdot t^2$　　(8)　$y_B = -S\sin\alpha = -\dfrac{1}{2}g\sin^2\alpha\cdot t^2$

問 3. (9)衝突するためには, 物体 A, B の座標が一致する必要がある。問題にあるように

(3) = (7)より　$v_0\cos\theta\cdot t = \dfrac{1}{2}g\sin\alpha\cos\alpha\cdot t^2$　…①

(4) = (8)より　$v_0\sin\theta\cdot t - \dfrac{1}{2}gt^2 = -\dfrac{1}{2}g\sin^2\alpha\cdot t^2$　…②

$t\neq 0$ であるので①式より

$$t = \frac{2v_0\cos\theta}{g\sin\alpha\cos\alpha} \qquad \cdots③$$

これを②式に代入して整理すると

$$v_0\sin\theta = \frac{1}{2}g\left(1-\sin^2\alpha\right)\cdot t = \frac{1}{2}g\cos^2\alpha\left(\frac{2v_0\cos\theta}{g\sin\alpha\cos\alpha}\right)$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \cdots④$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{1}{\tan\alpha} \qquad \cdots⑤ \quad \cdots(答)$$

(10)④式より

$$\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta = 0$$
$$\cos(\alpha+\theta) = 0$$

θ, α ともに 90° 以下であることを考慮に入れて　$\alpha + \theta = \dfrac{\pi}{2}$　…(答)

(数学の先生に怒られるかもしれないが, こんな方法もある。

$\alpha+\theta$ が一定値であると問題にあるので, α を適当に決めて θ を求める。

例えば, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ とすると, ⑤式より

$$\tan\theta = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{4}} = 1 \qquad \therefore \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

これより　$\alpha + \theta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$

α を他の値にしても求めることが出来る。また, 先に θ を適当に決めてもよい。)

(11)衝突するまでの時間 T は，③式なので，(10)の結果も利用して

$$T=\frac{2v_0\cos\theta}{g\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2v_0\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{g\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2v_0}{g\cos\alpha}\qquad\cdots(答)$$