起電力 E〔V〕の電池 E，容量がそれぞれ C，$2C$〔F〕のコンデンサーC_1，C_2，自己インダクタンス L〔H〕のコイル L およびスイッチ S_1，S_2 がある。以下の問に答えよ。

A.図1のような回路をつくった。はじめスイッチ S_1，S_2 は共に開いており，コンデンサーには電荷が蓄えられてなかった。S_1を閉じて十分に時間がたった後，開いた。

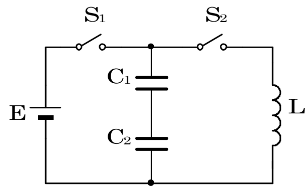

図 1

(1)コンデンサーC_1に蓄えられている電荷，静電エネルギーを求めよ。

(2)コンデンサーC_1，C_2 の合成容量を求めよ。

次に，S_2を閉じると回路に振動電流が流れた。

(3)振動電流の周期 T〔s〕を求めよ。

(4)コイルに流れる電流の最大値を求めよ。

B.次に図２のような回路をつくった。はじめスイッチ S_1，S_2 は共に開いており，コンデンサーには電荷が蓄えられてなかった。S_1を閉じて十分に時間がたった後，開き，S_2を閉じると回路に振動電流が流れた。振動の周期は A の回路と同じであった。

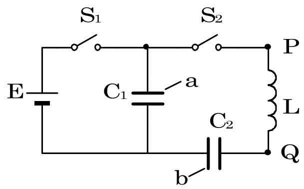

図 2

コンデンサーC_1，C_2 の極板 a，b に蓄えられる電荷をそれぞれ q_1，q_2〔C〕とする。またコイルに流れる電流を P→Q の向きを正として I〔A〕とし，コイルの起電力を P→Q の向きを正として V〔V〕とする。

(5)S_2を閉じた直後，コイルに流れる電流 I と，コイルに発生する起電力 V を求めよ。

(6)振動電流が流れている間，電荷の保存則より q_1，q_2 の間に成り立つ関係式を求めよ。

(7)S_2を閉じたあと，初めて電流 I が極大となるときの V を求めよ。また，そのときの q_1 を求めよ。さらに，回路全体でエネルギーが保存していることを利用して I を求めよ。

(8)S_2を閉じたあと，初めて電流 I が 0 になったときの q_1 を求めよ。

(9)S_2を閉じた瞬間を時刻 $t = 0$〔s〕とし，q_1 の変化を横軸に時間 t をとって１周期分描け。ただし周期は T としてよい。

(解説)直列接続されたコンデンサーとコイルによる電気振動の問題である。

電流は正弦曲線となり，周期 T はコンデンサーの合成容量を C，コイルの自己インダクタンス L として $2\pi\sqrt{LC}$ となる。これは，この問題の B のように，片方のコンデンサーだけが充電された状態から初めても同じである。

以上のことは，本来はこの回路の方程式を立てて，微分方程式として考えないといけないが，大学入試でそこまでは問われることはないので，ここでは割愛する。

他の電流の最大値などに関しては

・電荷の保存則

・コイルに流れる電流の性質や，自己誘導起電力

コイルの電流は急に不連続に変化できない。

誘導起電力 V は $V=-L\dfrac{\varDelta I}{\varDelta t}$ であるので，電流 I が極大のとき $V=0$

・回路に関して，キルヒホッフの法則

・コンデンサーの静電エネルギーとコイルの磁気エネルギーの和が一定

などを駆使して解けばよい。

(1)コンデンサーの直列接続である。C_1，C_2 の極板間の電圧をそれぞれ V_1，V_2 とすると

$$E=V_1+V_2$$

また電荷の保存則より

$$CV_1=2CV_2$$

この２式より $V_1=\dfrac{2}{3}E$ ， $V_2=\dfrac{1}{3}E$

ゆえにコンデンサー1 の電荷＝$CV_1=\dfrac{2}{3}CE$〔C〕 …(答)

静電エネルギー＝$\dfrac{1}{2}CV_1^2=\dfrac{2}{9}CE^2$〔J〕 …(答)

(2)直列接続であるので合成容量 C_{12}〔F〕は

$$\frac{1}{C_{12}}=\frac{1}{C}+\frac{1}{2C} \qquad \therefore C_{12}=\frac{2}{3}C\text{〔F〕} \qquad \cdots(答)$$

(3)容量 $C_{12}=\dfrac{2}{3}C$ のコンデンサーの電気振動と考えればよいので

$$T=2\pi\sqrt{LC_{12}}=2\pi\sqrt{\frac{2LC}{3}} \qquad \cdots(答)$$

(4)電流が最大(極大)I_0 のとき，コイルの起電力は 0 であるので，コンデンサーの電圧も 0 である。エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}CV_1^2+\frac{1}{2}\cdot 2CV_2^2=\frac{1}{2}LI_0^2$$

$$\frac{1}{2}C\left(\frac{2}{3}E\right)^2+\frac{1}{2}\cdot 2C\left(\frac{1}{3}E\right)^2=\frac{1}{2}LI_0^2 \qquad \therefore \quad I_0=E\sqrt{\frac{2C}{3L}} \qquad \cdots(答)$$

(5)S_2 を閉じる直前は $I=0$ である。コイルに流れる電流は急に変化できないので閉じた直後も $I=0$〔A〕 …(答)

このとき，C_1 の電圧は E(a 側が高電位)，C_2 の電圧は 0 なのでキルヒホッフの法則より

$$V=-E\text{〔V〕} \qquad \cdots(答)$$

(6) S_2 を閉じる前，C_1 に蓄えられた電荷は CE〔C〕である。電荷の保存則より

$$CE=q_1-q_2 \qquad \cdots① \quad \cdots(答)$$

(7)電流 I が最大(極大)となるとき，電流の時間変化 $\dfrac{\Delta I}{\Delta t}=0$ であるので，

コイルの起電力 $V=0$〔V〕　　…(答)

このとき C_1，C_2 の電圧はそれぞれ $\dfrac{q_1}{C}$，$\dfrac{q_2}{2C}$ であるのでキルヒホッフの法則より

$$\frac{q_1}{C}+\frac{q_2}{2C}=0 \qquad \cdots②$$

①，②式より　　$q_1=\dfrac{CE}{3}$　　…(答)

また，$q_2=-\dfrac{2CE}{3}$　である。このときの電流を I_0 として，エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}CE^2=\frac{q_1^2}{2C}+\frac{q_2^2}{2\cdot 2C}+\frac{1}{2}LI_0^2$$

$$\frac{1}{2}CE^2=\frac{\left(\frac{CE}{3}\right)^2}{2C}+\frac{\left(-\frac{2CE}{3}\right)^2}{2\cdot 2C}+\frac{1}{2}LI_0^2 \qquad \therefore \quad I_0=E\sqrt{\frac{2C}{3L}}$$

(8)エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}CE^2=\frac{q_1^2}{2C}+\frac{q_2^2}{2\cdot 2C} \qquad \cdots③$$

①式より $q_2=q_1-CE$ として③式に代入し，q_1 を求める。

$$\frac{1}{2}CE^2=\frac{q_1^2}{2C}+\frac{(q_1-CE)^2}{2\cdot 2C}$$

$$3q_1^2-2CEq_1-(CE)^2=0$$

$$(3q_1+CE)(q_1-CE)=0 \qquad \therefore \quad q_1=CE,-\frac{CE}{3}$$

$q_1=CE$ は初めの状態である。ゆえに，

$q_1=-\dfrac{CE}{3}$　　…(答)

(9)時刻 $t=0$ で電流が 0 で $q_1=CE$。さらに電流が最大となるとき $q_1=\dfrac{CE}{3}$。電流が 0 となると $q_1=-\dfrac{CE}{3}$ である。この後，電流が負(逆向き)になることも考慮すると，q_1 の変化は中心が $q_1=\dfrac{CE}{3}$ で振幅が $\dfrac{2CE}{3}$ の正弦曲線になる。これらを図にすると右図となる。