問 1 文中の空欄にあてはまる語句または数式を答えよ。ただし，「 ア 」などの一重鉤括弧には数式，『 ウ 』などの二重鉤括弧には語句，また，同じ記号の鉤括弧には同じものが入る。

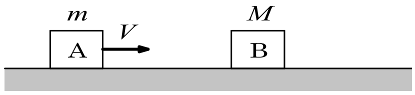


図 1

図 1 のように，なめらかな水平面上に置かれた質量 m の物体 A と質量 M の物体 B の運動を考える。物体 A と B は同一直線上を運動するものとし，速度や力などのベクトル量は，その直線方向の成分のみをもち，図で右向きを正とする。

いま，物体 A が速度 V で右に向かって運動し，静止している物体 B と衝突したとする。その際，物体 A と物体 B は時間 T の間接触し，その間に物体 A は物体 B に一定の力 F_0 を及ぼしたものとする。2 つの物体が接触している間の物体 B の加速度は「 ア 」であり，2 つの物体が離れたあと(衝突後)の物体 B の速度は「 イ 」となる。それに対して，物体 A が物体 B から受ける力は，『 ウ 』の法則より「 エ 」であるから，衝突後の物体 A の速度は「 オ 」となる。これらの結果より，衝突の際にはたらく力に関わらず，衝突の前後で 2 つの物体の『 カ 』の和が変化しないことが分かる。

衝突のように短い時間に大きな力を及ぼしあう場合の運動は，力積を用いると記述しやすい。力積の単位は基本単位(kg，m，s)で表すと「 キ 」である。いま考えている衝突の場合，物体 A が物体 B に及ぼした力積は「 ク 」である。

また，衝突前後の物体の『 カ 』の変化から衝突の際にはたらいた力積を求めることもできる。この関係から，物体 A が物体 B に及ぼした力積が最も小さくなるのは,反発係数(はねかえり係数)が「 ケ 」の場合で，そのときの力積は「 コ 」となることがわかる。

問 2 図 2 に示すように，勾配(こうばい)θ〔rad〕が $\tan\theta = 0.3$ で与えられる斜面上での，質量 m の 2 つの物体 C および D 運動を考える。斜面と物体 C との間には摩擦はないが，斜面と物体 D の間には摩擦力がはたらくものとする。

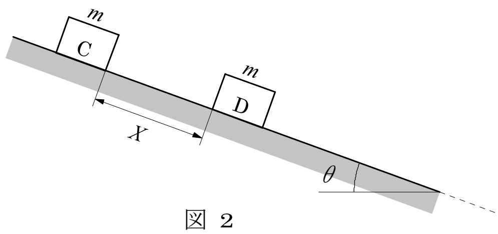


図 2

最初，物体 D は静止摩擦で斜面上に静止している。時刻 $t = 0$ に物体 C が物体 D から距離 X 離れたところから初速 0 ですべり始め，時刻 $t = t_1$ に静止状態の物体 D と弾性衝突(完全弾性衝突)した。その後，2 つの物体はいったん離れ，時刻 $t = t_2$ に再び斜面の途中で衝突した。

衝突している時間はきわめて短く，衝突に対する静止摩擦の影響も無視できるものとする。また，斜面と物体 D との動摩擦係数を $\mu' = 0.3$ とし，重力加速度の大きさを g，速度は斜面にそって下向きを正とする。

(1)最初の衝突直前の物体 C の速度 V_0，および衝突の時刻 t_1 を求めよ。ただし，勾配は θ と記してよい。

(2)最初の衝突直後の，物体 C の速度 V_C および物体 D の速度 V_D を求めよ。ただし,物体 C の衝突直前の速度として V_0 を用いてよい。

(3)最初の衝突後に物体 D に作用する力をすべて，図 3 に矢印で示せ。さらに，それぞれの力の名称およびその大きさを書け。ただし，矢印の向きと長さは力の向きと大きさに対応させること。

(4)時刻 $t=0$ からふたたび衝突する時刻 $t=t_2$ までの物体 C および D の速度の時間変化を，それぞれ破線および実線で，図 4 に示せ。ただし，グラフの軸の目盛りは V_0 と t_1 を基準とすること。

(5)物体 C と D がふたたび衝突するまでに物体 D が移動する距離 Y を，X を用いて表せ。

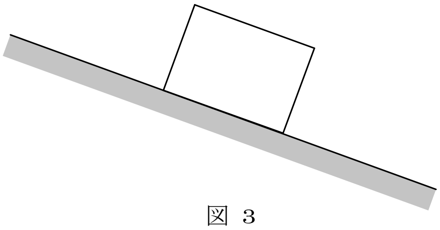


図 3

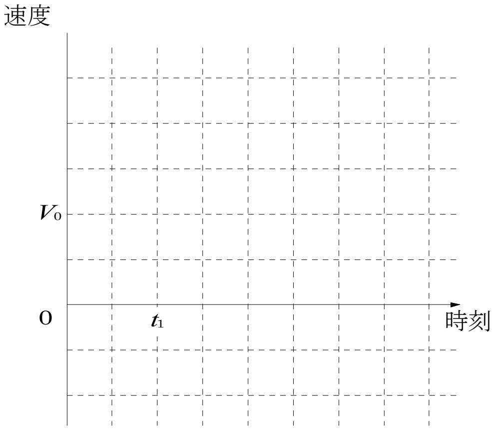


図 4

(解説)前半は，運動量保存則を導く問題である。

物体の運動量変化は物体に働く力積と等しい。

物体 A，B からなる物体系を考えるとき，A から B に，また B から A に働く力を内力という。内力の力積の和は作用反作用の法則より 0 となるので，物体系に内力のみが働くとき，運動量の和は保存する。

後半は，運動の問題であるが，どのような運動をしているのか，この問題のようにグラフを書いてみるとよく分かる。(出題者としては，どのような運動をしているか理解しているかどうかを試すのに，グラフを書かせるということである。)

問１ア．物体 B の加速度を a_B として，運動方程式より

$$Ma_B = F_0 \qquad \therefore \qquad a_B = \frac{F_0}{M} \qquad \cdots(\text{答})$$

イ．等加速度なので，B の速度 V_B は $\quad V_B = a_B T = \dfrac{F_0 T}{M} \qquad \cdots(\text{答})$

ウ．　作用反作用　…(答)

エ．B から A に働く力は，A から B に働く力と同じ大きさで反対向きであるので

$$-F_0 \qquad \cdots(\text{答})$$

オ．物体 A の加速度を a_A として，運動方程式より $\quad ma_A = -F_0 \qquad \therefore \qquad a_A = -\dfrac{F_0}{m}$

ゆえに A の速度 V_A は $\quad V_A = V + a_A T = V - \dfrac{F_0 T}{m} \qquad \cdots(\text{答})$

カ．　運動量　…(答)

(確認)時間 T 後の A，B の運動量の和を求めると

$$mV_A + MV_B = m\left(V - \frac{F_0 T}{m}\right) + M \cdot \frac{F_0 T}{M} = mV$$

となり，接触前の A の運動量となる。つまり運動量の和が変化していない。

キ．力積＝力×時間　である。したがって単位は

〔N〕×〔s〕=〔kgm/s²〕×〔s〕=〔kgm/s〕　…(答)

ク．物体 B に及ぼした力は F_0 で，時間は T なので力積 I は $\quad I = F_0 T \qquad \cdots(\text{答})$

ケ．B に与えた力積は B の運動量変化であるので

$$I = MV_B$$

したがって，V_B が小さいほど力積も小さい。はねかえり係数が小さいほど V_B も小さいので最小になるのは $\quad e = 0 \qquad \cdots(\text{答})$

コ．$e = 0$ のとき，衝突後の A，B の速度は等しい。ゆえに

$$mV = (m + M)V_B \qquad \therefore \qquad V_B = \frac{m}{m+M}V$$

ゆえに，B の受けた力積 I は $\quad I = MV_B = \dfrac{mM}{m+M}V \qquad \cdots(\text{答})$

(確認) V_B と e の関係をきちんと求めてみよう。運動量保存則より

$$mV = mV_A + MV_B$$

はねかえり係数の関係より

$$e = -\frac{V_A - V_B}{V}$$

これら 2 式より $\quad V_B = \dfrac{m(1+e)}{m+M}V$

となり，$e = 0$ で V_B は最小である。

問 2(1)C の加速度を a_c とする。運動方程式より

$$ma_C = mg\sin\theta \qquad \therefore \qquad a_C = g\sin\theta$$

等加速度運動の公式より

$$X = \frac{1}{2}a_C t_1^2 \qquad \therefore \qquad t_1 = \sqrt{\frac{2X}{a_C}} = \sqrt{\frac{2X}{g\sin\theta}} \qquad \cdots(答)$$

$$V_0 = a_C t_1 = \sqrt{2gX\sin\theta} \qquad \cdots(答)$$

(2)衝突は短い時間でおこり, この間に重力, 摩擦力からの力積は C, D 間に働く力の力積より十分小さく無視できる。ゆえに C, D からなる物体系に内力のみが働くと考えてよい。ゆえに衝突の直前, 直後で体系の運動量が保存する。

運動量保存則より

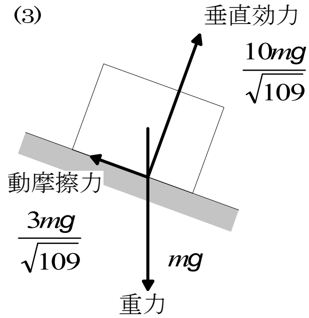
$$mV_0 = mV_C + mV_D \qquad \cdots①$$

はねかえり係数の式より

$$1 = -\frac{V_C - V_D}{V} \qquad \cdots②$$

①, ②式を解いて

$$V_C = 0 \quad , \quad V_D = V_0 \qquad \cdots(答)$$



(3)D には重力, 斜面からの垂直抗力, 動摩擦力が働く。ゆえに右図となる。(正確に考えると D は回転しないから全ての力の作用線は 1 点で交わるはずである。そのため, 右図のようになる。が, そこまでこだわらなくてもいいかな)

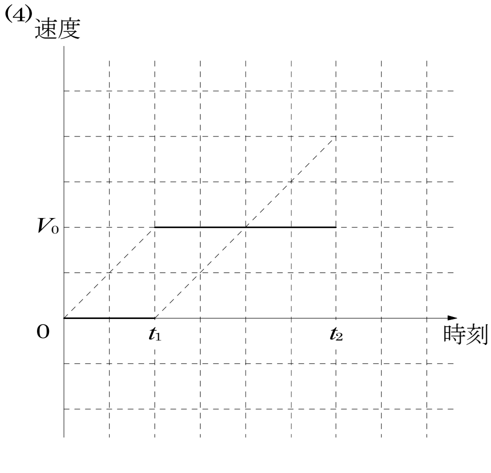
$\tan\theta = 0.3$ より, $\sin\theta$, $\cos\theta$ を求めると $\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{109}}$, $\cos\theta = \frac{10}{\sqrt{109}}$

であるので, 垂直抗力の大きさ N は, 斜面に垂直方向のつりあいを考えて

$$N = mg\cos\theta = \frac{10mg}{\sqrt{109}}$$

動摩擦力の大きさ f は

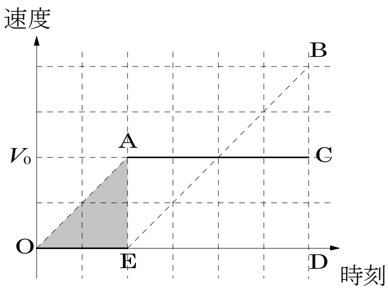
$$f = \mu' N = \frac{3mg}{\sqrt{109}}$$



(4)C は速度 0 から再び加速度 a_c で等加速度運動をする。D の斜面方向のつりあいを考えると

$$f - mg\sin\theta = \frac{3mg}{\sqrt{109}} - mg\frac{3}{\sqrt{109}} = 0$$

となり力はつりあっている。ゆえに D は速さ V_0 で等速運動する。t_1 以後で C と D の移動距離が等しくなると再び衝突する。t_1 以後の C と D のグラフの面積が等しくなるときである。ゆえに衝突時刻 $t_2 = 3t_1$ となる。これらをまとめて描くと右図となる。



(5)(4)のグラフの面積で考えればよい。右に拡大図を示す。はじめに衝突するまでの C の移動距離 X は図斜線部(三角形 OAE)の面積である。再衝突までの C, D の移動距離 Y は図の三角形 EBD, もしくは四角形 ACDE の面積である。ゆえに

$$Y = 4X \qquad \cdots(答)$$