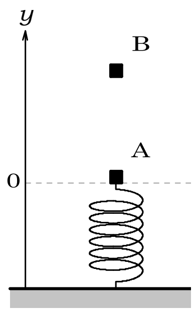


図のように，質量の無視できるばね定数 k の十分に長いばねが鉛直に立てられており，その上に大きさの無視できる質量 m の物体 A が取り付けられている。重力とばねの復元力がつり合っているときの物体 A の位置を y 軸の原点($y = 0$)とする。ただし，y 軸の正の向きを鉛直上向きにとる。物体 A は鉛直方向にのみ動くとして，以下の問いに答えよ。重力加速度の大きさを g とする。

問 1　つり合いの位置でのばねの長さは，自然長よりもある長さだけ短くなっていた。その長さを，k, m, g のうちの必要なものを用いて表せ。

最初，物体 A は静止していた。物体 A と同じ質量 m の，大きさの無視できる物体 B を，物体 A の真上の $y = h$ の位置から初速度 0 で落下させた。物体 B は物体 A と完全非弾性衝突し，物体 A と一体となって運動を続けた。この衝突は瞬時に起こり，物体 A と物体 B の全運動量は衝突の直前直後で変わらない。

問 2　一体となった物体の衝突直後の速さ v を，k, m, g, h のうちの必要なものを用いて表せ。

一体となった物体は最下点に達した後，上昇を始め，ある位置になったときに物体 B は物体 A から離れた。衝突してから離れるまでの運動は単振動である。

問 3　この単振動の中心の y 座標と，単振動の角振動数を，k, m, g, h のうちの必要なものを用いて，それぞれ表せ。

この系の力学的エネルギーは，一体となった物体の運動エネルギー，重力による位置エネルギー，ばねに蓄えられた弾性エネルギーの和で与えられる。ただし，重力による位置エネルギーは，y 軸原点を基準にして測るものとする。

問 4　衝突直後の力学的エネルギーを，k, m, g, v のうちの必要なものを用いて表せ。

問 5　最下点の y 座標を，k, m, g, h のうちの必要なものを用いて表せ。

物体 B が物体 A から離れる位置を考えてみよう。

問 6　一体となって運動している物体の位置の y 座標が y のとき，物体 B が物体 A から受ける抗力の大きさを，y, k, m, g, h のうちの必要なものを用いて表せ。

問 7　物体 B が物体 A から離れる位置の y 座標を，k, m, g, h のうちの必要なものを用いて表せ。

(解説)力学的エネルギー保存則，運動量保存則，運動方程式と力学の基礎を含んだ問題である。

$y<0$ の領域で考えると間違いやすい。出来るだけ $y>0$ の領域で考えよう。

単振動に関しては，中心はつりあいの位置。また角振動数 ω はばね振り子なので

$$\omega=\sqrt{\frac{\text{ばね定数}}{\text{質量}}}$$

としてしまってよいであろう。

問 1. 自然長から短くなった長さを l_0 とする。物体 A に働く力のつりあいより

$$kl_0-mg=0 \qquad \therefore \quad l_0=\frac{mg}{k} \quad \cdots① \qquad \cdots(\text{答})$$

問 2. 衝突直前の B の速さ V は，力学的エネルギー保存則より

$$mgh=\frac{1}{2}mV^2 \qquad \therefore \quad V=\sqrt{2gh}$$

運動量保存則より

$$mV=2mv \qquad \therefore \quad v=\frac{V}{2}=\sqrt{\frac{gh}{2}} \quad \cdots② \qquad \cdots(\text{答})$$

問 3. 一体となった A, B の任意の座標 y での運動方程式は，加速度 a として

$$2ma=k(l_0-y)-2mg$$

①式を利用して整理すると

$$2ma=-ky-mg$$

単振動の中心 y_0 では，$a=0$ であるので

$$0=-ky_0-mg \qquad \therefore \quad y_0=-\frac{mg}{k} \qquad \cdots(\text{答})$$

ばね定数 k のばねに，質量 $2m$ の物体のばね振り子であるので，角振動数 ω は

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{2m}} \qquad \cdots(\text{答})$$

(補足)運動方程式を考えるときは y の正負に十分に注意して式を立てること。間違わないためには出来るだけ，$y>0$ の領域で考えるとよい。この問題では原点より少し上(自然長より下)で考えると考えやすい。ばねの縮みは l_0-y で，力は上向きである。もちろん，$y<0$ の領域で考えても結果は同じである。ただし，間違いやすい。

この問題では後のこともあるので運動方程式を立てたが，中心を求めるだけなら物体(一体となった A, B)に働く合力が 0 の点を求めるだけでよい。中心は原点からさらにばねが l_1 縮んだ位置として，①式も利用して

$$k(l_0+l_1)-2mg=0 \qquad \therefore \quad l_1=\frac{mg}{k}$$

ゆえに，中心の y 座標は　$y_0=-l_1=-\dfrac{mg}{k}$

としてもよい。

さらに，角振動数 ω も，ばね振り子なので本文にあるようなやり方でよいが，真面目にやると以下のようになる。y_0 を原点として鉛直上向きの座標 Y をとる。任意の Y で物体の運動方程式は加速度を b として

$$2mb=k(l_0+l_1-Y)-2mg=-kY$$

単振動の性質より $b=-\omega^2Y$ であるので，これを代入して

$$-2m\omega^2Y=-kY \qquad \therefore \quad \omega=\sqrt{\frac{k}{2m}}$$

問 4. 物体 A, B の速さは v で，ばねは自然長より l_0 縮んでいるので力学的エネルギー E_0 は，①式も利用して

$$E_0 = \frac{1}{2}\cdot 2mv^2 + \frac{1}{2}kl_0^2 = mv^2 + \frac{(mg)^2}{2k} \qquad \cdots(答)$$

問 5. 最下点では速さが 0 になる。また $y<0$ であることに注意して力学的エネルギー E は

$$E = 2mgy + \frac{1}{2}k(l_0 - y)^2$$

力学的エネルギー保存則より

$$mv^2 + \frac{(mg)^2}{2k} = 2mgy + \frac{1}{2}k(l_0 - y)^2$$

①，②式を代入して y について解く。

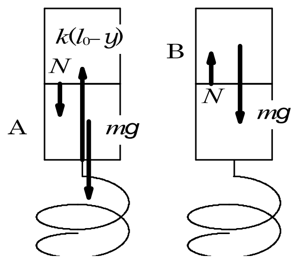
$$y^2 + \frac{2mg}{k}y - \frac{mgh}{k} = 0$$

$$y = -\frac{mg}{k}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{kh}{mg}}\right)$$

最下点は $y<0$ であるので

$$y = -\frac{mg}{k}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{kh}{mg}}\right) \qquad \cdots(答)$$

問 6. 物体 B が物体 A から受ける(垂直)抗力の大きさを N とする。任意の y でばねの縮みは $l_0 - y$ であり，A, B に働く力は図のようになる。加速度を a とすると，それぞれの運動方程式は



A ： $ma = k(l_0 - y) - mg - N$

B ： $ma = -mg + N$

①式を代入し，a を消去して N を求めると

$$N = \frac{1}{2}(mg - ky) \qquad \cdots③ \qquad \cdots(答)$$

問 7. $N=0$ で離れるので，③式より

$$0 = \frac{1}{2}(mg - ky) \qquad \therefore \quad y = \frac{mg}{k} \qquad \cdots(答)$$

(ばねが自然長の位置である。)