次の文を読んで，[　　]に適した式を，それぞれの解答欄に記入せよ。なお，【　　】はすでに[　　]で与えられたものと同じ式を表す。また，問1，問2では，指示にしたがって，解答をそれぞれの解答欄に記入せよ。

図１に示すように，水平な床の上に質量 M の台車(全長 $2L$)が置かれている。台車には中央部に支柱によって支持された水平な棒が取り付けられている。その水平な棒の中央から大きさが無視できる質量 m の小球(質点)が，長さ h のひもでつるされている。支柱と棒とひもの質量は無視できる。小球は最下点(ひもと水平面とのなす角が 90°)で台車と滑らかに接する。台車と小球の間の摩擦は無視できる。以下では，小球は図１中の xy 平面(鉛直平面)内で運動するものとする。台車は床と離れることなく，x 方向に運動するものとする。台車には軽く薄い壁 C(質量と厚さが無視できる)が取り付けられている。小球と壁 C のはね返り係数(反発係数)を e とする。重力加速度の大きさを g とする。

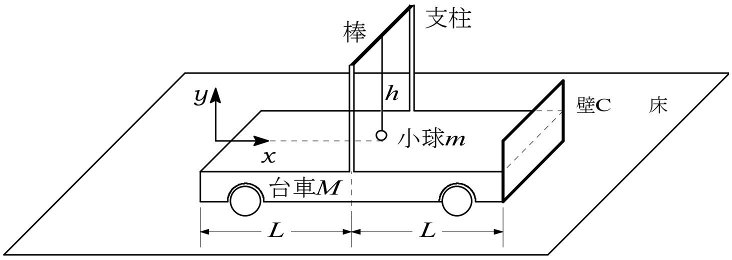


図 1

(1)はじめに，台車を床に固定する。このときに図２に示すように，小球をひもが水平に張られる点 A まで持ち上げる。その後，静かに小球をはなすと，小球は xy 平面内を降下する。小球が最下点 B に到達する直前の小球の速さは[　ア　]であり，このときのひもの張力は[　イ　]である。小球が最下点 B に到達した瞬間にひもを切ると，小球は台車の上面を移動して壁 C に衝突してはね返り，台車の端 D に至る。なお，ひもを切るときには，小球は力積を受けないとする。最下点 B でひもを切った瞬間から小球が台車の端 D に到達するまでの時間は[　ウ　]である。

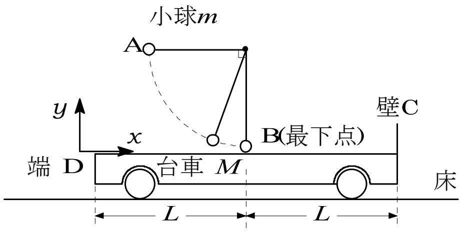


図 2

(2)つぎに，台車が床の上を摩擦なく移動できるようにする。このとき，はじめに台車を動かないように押さえて，図２に示すように，小球をひもが水平に張られる点 A まで持ち上げる。その後，静かに台車と小球を同時にはなすと，台車と小球が運動する。小球が点 A から最下点 B に到達するまでの間，小球をつるすひもがたるむことはないとする。小球が最下点 B に到達する直前の小球の速さは[　エ　]であり，このときのひもの張力は[　オ　]である。小球が最下点 B に到達した瞬間にひもを切ると，小球は台車の上面を移動して壁 C に衝突してはね返り，台車の端 D に至る。なお，ひもを切るときには，小球および台車は力積を受けないとする。小球は最下点 B から壁 C に到達するまでの間，台車に対して相対的な速さ[　カ　]で運動する。小球が最下点 B から壁 C に到達するまでの時間は[　キ　]である。また，小球が壁 C に衝突してはね返ってから台車の端 D に到達するまでの時間は[　ク　]である。したがって，最下点 B でひもを切った瞬間から小球が台車の端 D に到達するまでの時間は，台車を固定したときの時間に【　ウ　】の[　ケ　]倍となる。

問 1 上記の(2)の状態(台車が床の上を摩擦なく移動できる状態)で，小球と台車をまとめて一つの系と呼ぶことにする。この系の重心(質量中心)は水平方向には動かない。この理由を 50 字以内で簡潔に説明せよ。

問 2 上記の(2)の状態(台車が床の上を摩擦なく移動できる状態)で，台車を動かないように押さえて小球をひもが水平に張られる点 A まで持ち上げ，台車と小球を同時にはなした瞬間の台車の位置を基準点とすれば，小球が壁 C に衝突してはねかえって台車の端 D に至った瞬間に台車はどの位置にあるか。問 1 で述べたこと(系の重心が水平方向に動かないこと)を利用して，導出の過程を含めて解答せよ。なお，ひもの長さ h は台車の全長の半分 L より短い($h < L$)。

(解説)動く台車上での振り子の運動。(1)は基本。(2)以降で台車が動く場合も，水平方向の運動量が保存する入試標準問題である。オ．だけがやや難しい。床から見ると小球の運動は半径 h の円運動ではない。台車上で見ると円運動なので，台車上から見て解く。また反発係数は相対速度の比である。壁 C との衝突で，これを利用すれば計算が速い。

(1)ア．力学的エネルギー保存則より最下点での速さ v_0 は

$$mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad \therefore \qquad v_0 = \sqrt{2gh} \qquad \cdots(\text{答})$$

イ．小球は半径 h の円運動をしている。円運動の運動方程式より，ひもの張力を T_0 として

$$\frac{mv_0^2}{h} = T_0 - mg$$

$$T_0 = mg + \frac{mv_0^2}{h} = mg + \frac{m\left(\sqrt{2gh}\right)^2}{h} = 3mg \qquad \cdots(\text{答})$$

ウ．壁 C で衝突した後の速さは ev_0 であるので，D に達するまでの時間 t_0 は

$$t_0 = \frac{L}{v_0} + \frac{2L}{ev_0} = \frac{L}{\sqrt{2gh}}\left(1 + \frac{e}{2}\right) \qquad \cdots(\text{答})$$

(2)エ．小球が最下点 B に来たとき，小球の速度を v，台車の速度を V とする。水平方向の運動量が保存するので

$$0 = mv + MV \qquad \cdots①$$

力学的エネルギー保存則より

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 \qquad \cdots②$$

①，②式より

$$v = \sqrt{\frac{2Mgh}{M+m}} \qquad \cdots(\text{答})$$

オ．小球は台車上から見て半径 h の円運動をする。小球が B に来たとき，台車から見た小球の相対速度 $u = v - V$ である。①，②式より V は

$$V = -\frac{m}{M}\sqrt{\frac{2Mgh}{M+m}}$$

であるので

$$u = v - V = \sqrt{\frac{2Mgh}{M+m}} - \left(-\frac{m}{M}\sqrt{\frac{2Mgh}{M+m}}\right) = \sqrt{\frac{2(M+m)gh}{M}}$$

張力を T として，台車上で見て円運動の運動方程式より

$$\frac{mu^2}{h} = T - mg$$

$$T = mg + \frac{mu^2}{h} = mg + \frac{m}{h}\left(\sqrt{\frac{2(M+m)gh}{M}}\right)^2 = \frac{(3M+2m)mg}{M} \qquad \cdots(\text{答})$$

(補足)台車上で見るので，小球に働く慣性力について考慮する必要がある。小球が最下点に来たとき，台車に対して水平方向に働く力はないので，台車の床に対する加速度は 0 である。ゆえに，台車上で観測した小球に慣性力は働かない。また，もし仮に台車の加速度が 0 でないとしても，台車の加速度は水平なので慣性力も水平方向である。ゆえに，最下点 B での小球の円運動の運動方程式には慣性力は入ることはない。

カ．相対速度　$u = \sqrt{\dfrac{2(M+m)gh}{M}}$　　$\cdots$(答)

キ．台車上での距離 L だけ進むので，D までの時間 t_1 は

$$t_1 = \frac{L}{u} = L\sqrt{\frac{M}{2(M+m)gh}}$$ …(答)

ク．壁 C との衝突後の小球の相対速度の大きさ u' は

$$u' = |-eu| = e\sqrt{\frac{2(M+m)gh}{M}}$$

D まで，台車に対する小球の移動距離は $2L$ なので，時間 t_1 は

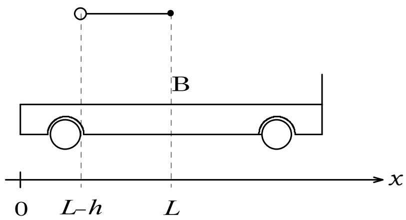
$$t_2 = \frac{L}{u'} = \frac{2L}{e}\sqrt{\frac{M}{2(M+m)gh}}$$ …(答)

ケ．B から D までかかる時間 $t_1 + t_2$ と t_0 の比をとって

$$\frac{t_1 + t_2}{t_0} = \frac{\left(L + \frac{2L}{e}\right)\sqrt{\frac{M}{2(M+m)gh}}}{\frac{L}{\sqrt{2gh}}\left(1 + \frac{e}{2}\right)} = \sqrt{\frac{M}{M+m}}$$ …(答)

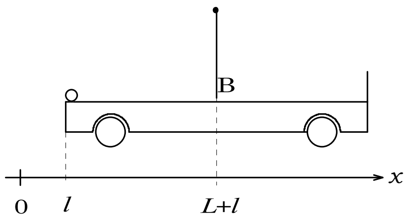
問 1．系に対して水平方向の外力は働かないので，元々静止していた重心は水平方向に動かない。　　…(答)

問 2．図で初めの状態の台車の端 D を原点として水平右向きに x 軸をとる。台車の重心の水平方向の位置が B 上であるとして，初めの状態の系の重心の水平方向の位置 x_G は



$$x_G = \frac{ML + m(L-h)}{M+m}$$

小球が台車の端 D に来るまでに，台車が水平に l だけ移動したとして系の重心の水平方向の位置 x_G は



$$x_G = \frac{M(L+l) + ml}{M+m}$$

系の重心は移動していないので

$$\frac{ML + m(L-h)}{M+m} = \frac{M(L+l) + ml}{M+m}$$

$$\therefore \quad l = \frac{m(L-h)}{M+m}$$ …(答)