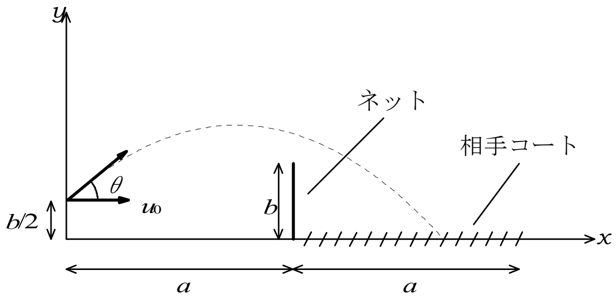
次の問題の空欄に最も適した数字，式を記入し,(3)ではグラフをかけ。



テニスでボールを打って相手コートに入れるにはボールをどのような初速度で打ち出せばよいかを考えよう。テニスコートの配置を右図のように理想化する。コートの長さを a(全長は $2a$)，ネットの高さを b とし，プレーヤーはコートの端の点 O に立ち，そこから鉛直方向に $\dfrac{b}{2}$ だけ離れた点 P から，水平方向の初速度 u_0 で，水平面とのなす角度 $\theta(\theta>0)$の方向にボールを打ち出すことにする。重力加速度の大きさを g とし，ボールと空気の摩擦は考えないことにする。

(1)O を原点にとり，水平方向に x 座標，鉛直方向に y 座標をとる。時刻 $t=0$ に打ち出されたボールの時刻 t での位置を$(x,\ y)$とすれば，$x=$ ［ア］，$y=$ ［イ］となる。

(2)ボールが自分のコートでバウンドすることなくネットを越える条件は，$\tan\theta$ ＞［ウ］で，かつ $u_0^2>$［エ］である。そのボールがネットを越えて，相手コートに入り，そこでバウンドする条件は，$u_0^2<$［オ］である。

(3)ボールがネットを越えて相手コートに入る u_0 と $\tan\theta$ の範囲を知るために，$\tan\theta$ を横軸に，u_0^2 を縦軸にとり，上で求めた3つの条件を満たす領域を斜線で示せ。また，重要と考えられる座標も記入せよ。

(4)u_0 が大きすぎると，ボールの打ち出し角度をどのように選んでも相手コートに入らない。ボールが相手コートに入る u_0 の最大値は［カ］であり，そのときの $\tan\theta$ の値は［キ］である。

(5)$a=1.0\times10$m，$b=1.0$m の場台,有効数字 2 桁まで求めれば，ボールが相手コートに入る u_0 の最大値は［ク］m/s であり，そのときの $\tan\theta$ の値は［ケ］である。ただし，$g=9.8\text{m/s}^2$,

$\sqrt{3}=1.73$，$\sqrt{10}=3.16$ とせよ。

(解説)物理としては斜方投射の式をしっかりと作るだけである。その式を問題に与えられた条件にいかに当てはめていくかという問題である。(3)は数学の問題と思えばよい。

(1)鉛直方向の初速度は $u_0\tan\theta$ である。斜方投射であるので

$$x = u_0 t \quad \cdots① \quad \cdots(ア)$$

$$y = \frac{b}{2} + u_0\tan\theta\cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \cdots② \quad \cdots(イ)$$

(2)ボールがネットに達した $x = a$ のとき，$y > b$ であればよい。ボールがネットに達する時刻 t_1 は①式より

$$x = a = u_0 t_1 \qquad \therefore \quad t_1 = \frac{a}{u_0}$$

②式に代入して

$$y = \frac{b}{2} + u_0\tan\theta\cdot\left(\frac{a}{u_0}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{a}{u_0}\right)^2 > b$$

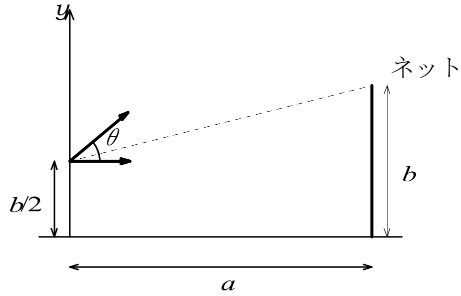
$$\therefore \quad u_0^2 > \frac{ga^2}{2a\tan\theta - b} \quad \cdots③ \quad \cdots(エ)$$

③式が成立し，u_0 が実数で存在するためには

$$2a\tan\theta - b > 0 \qquad \therefore \quad \tan\theta > \frac{b}{2a} \quad \cdots④ \quad \cdots(ウ)$$

(参考)④式の条件について。これは，右図のように打ち出した瞬間の速度の方向が，ネットの上端以上である必要があるということである。初速度の方向がネットの上端より下なら絶対にネットを超えない。ゆえに

$$\tan\theta > \frac{b - \frac{b}{2}}{a} = \frac{b}{2a}$$



次に相手コートでバウンドするためには，$x = 2a$ のとき，$y < 0$ である必要がある。(ボールが地面にめり込むわけではないが，$x < 2a$ で $y = 0$ になるなら，計算上 $x = 2a$ で $y < 0$ になる。$y = 0$ になるとき $x < 2a$ であることが条件であるとしてもよいが，計算が大変になる。)

$x = 2a$ となる時刻 t_2 は①式より

$$x = 2a = u_0 t_2 \qquad \therefore \quad t_2 = \frac{2a}{u_0}$$

②式に代入して

$$y = \frac{b}{2} + u_0\tan\theta\cdot\left(\frac{2a}{u_0}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{2a}{u_0}\right)^2 < 0$$

$$\therefore \quad u_0^2 < \frac{4ga^2}{4a\tan\theta + b} \quad \cdots⑤ \quad \cdots(オ)$$

(3)③，④，⑤の式をグラフにする。

(4)グラフより

$$u_0^2 > \frac{2ga^2}{3b}$$

では，条件を満たさない。ゆえに

$$u_0 = a\sqrt{\frac{2g}{3b}} \qquad \cdots(カ)$$

またグラフより

$$\tan\theta = \frac{5b}{4a} \qquad \cdots(キ)$$

(5)与えられた数値を代入して

$$u_0 = 10\sqrt{\frac{2\times 9.8}{3\times 1.0}} = 10\sqrt{\frac{4\times 49}{3\times 10}} = 25.6 \fallingdotseq 26\text{m/s}$$

$\cdots(ク)$

$$\tan\theta = \frac{5\times 1.0}{4\times 10} = 0.125 \fallingdotseq 0.13 \qquad \cdots(ケ)$$