以下の文の［ ア ］～［ コ ］の空欄に適当な式を答よ。

図１のように断面積 S のシリンダーと滑らかに動くピストンで，n mol の単原子分子理想気体が密封されている。シリンダーとピストンは断熱材で出来ている。シリンダーの底面からピストンまでの距離は L である。気体定数を R，アボガドロ数を N_A とする。

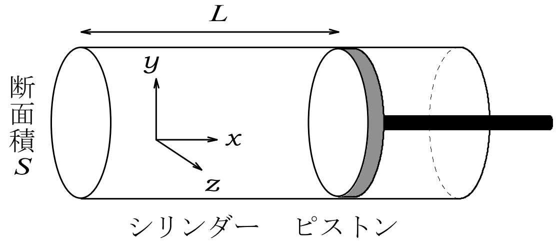

図1

シリンダー内の気体の温度を T とすると，気体の内部エネルギー U は，U = ［ ア ］である。また，気体分子の質量を m，速度の 2 乗平均を $\overline{v^2}$ とすると，分子の運動エネルギーの総和が内部エネルギーであるので，U = ［ イ ］ともかける。

次に，ピストンを一定の速さ u で押し込める。シリンダーの長さ方向に x 軸，直角方向に y 軸，z 軸をとる。図２に z 軸方向から見たピストン付近の拡大図を示す。

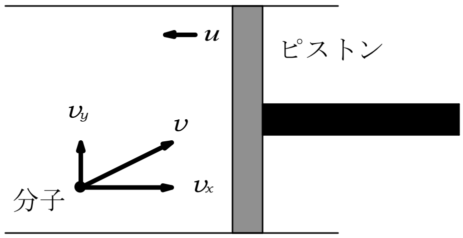

図 2

ある分子に注目しよう。この分子の速さは v で，速度の x, y, z 成分はそれぞれ v_x, v_y, v_z であるとする。ピストンとの弾性衝突で変化するのは x 成分だけであり，ピストンと衝突後，v'_x になったとする。v'_x を，v_x ，u であらわすと，v'_x = ［ ウ ］である。1 回の衝突で分子の運動エネルギーの変化量 ΔE は，$v'_x \gg u$ であるので u^2 の項を無視すると，ΔE =［ エ ］となる。

気体分子がシリンダーを往復し，再びピストンに衝突する時間はピストンの動きによらず $\dfrac{2L}{v_x}$ であるとし，衝突ごとに ΔE だけ運動エネルギーが変化すると，この分子の時間 Δt の間の運動エネルギーの変化量 E は，E = ［ オ ］となる。

シリンダー内の全分子の速度の x 成分の 2 乗平均を $\overline{v_x^2}$ とすると，$\overline{v_x^2} = \dfrac{\overline{v^2}}{3}$ の関係がある。これらより時間 Δt での全分子の運動エネルギーの変化量＝内部エネルギーの変化量 ΔU を $\overline{v^2}$ を用いて表すと，ΔU = ［ カ ］となる。この間の体積変化 ΔV は，ΔV = ［ キ ］である。ピストンを動かす前の体積を V とし，【イ】，【カ】，【キ】より $\dfrac{\Delta U}{U}$ を，V, ΔV で表すと，$\dfrac{\Delta U}{U}$ = ［ ク ］となる。

また，この間の温度変化を ΔT とする。$\dfrac{\Delta U}{U}$ を T, ΔT で表すと，$\dfrac{\Delta U}{U}$ = ［ ケ ］となる。【ク】，【ケ】より，T, ΔT, V, ΔV の関係は，$\dfrac{\Delta T}{T}$ =［ コ ］となる。

(解説)断熱変化を分子の運動から捉えた問題である。断熱圧縮の場合，ピストンのとの衝突により分子の速度が増し，運動エネルギーが増加する様子を見て欲しい。その結果，温度が上昇する。断熱膨張であれば逆に衝突のたびに速度が遅くなり，温度は低下する。キ．で，体積変化は負であることに注意しよう。

なお，単原子分子理想気体の断熱変化では，圧力 P，体積 V，温度 T の間に

$$PV^{\frac{5}{3}} = 一定 \quad , \quad TV^{\frac{2}{3}} = 一定$$

の関係がある。

ア．単原子分子理想気体が n mol あるので

$$U = \frac{3}{2}nRT \quad \cdots① \quad \cdots(答)$$

イ．気体分子の総数は nN_A であるので，運動エネルギーの総和は

$$U = nN_A \times \frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{1}{2}nN_A m\overline{v^2} \quad \cdots② \quad \cdots(答)$$

ウ．ピストンの速さは気体分子との衝突でも変化しない。弾性衝突であるので反発係数は１と考えてよいので

$$1 = -\frac{v'_x - (-u)}{v_x - (-u)} \qquad \therefore \quad v'_x = -v_x - 2u \quad \cdots(答)$$

(参考)衝突後，気体分子は x 負方向に向かうことを考慮すると

$$v'_x = -(v_x + 2u)$$

となり，衝突により分子の速さは速くなっていることが分かる。

エ．運動エネルギーの変化量 $\varDelta E$ は

$$\varDelta E = \frac{1}{2}m\left(v'^2_x + v_y^2 + v_z^2\right) - \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) = \frac{1}{2}m(-v_x - 2u)^2 - \frac{1}{2}mv_x^2 = 2muv_x + 2mu^2$$ ここで，u^2 を含む項を消去して

$$\varDelta E \fallingdotseq 2muv_x \quad \cdots(答)$$

オ．時間 $\varDelta t$ の間にこの分子はピストンと $\frac{v_x}{2L}\varDelta t$ 回衝突する。毎回 $\varDelta E$ だけエネルギーを失うとして

$$E = 2muv_x \times \frac{v_x}{2L}\varDelta t = \frac{muv_x^2}{L}\varDelta t \quad \cdots(答)$$

カ．分子１個のエネルギーの変化量の平均は，オ．の結果より $\frac{mu\overline{v_x^2}}{L}\varDelta t$ となる。全分子で

$$\varDelta U = nN_A \times \frac{mu\overline{v_x^2}}{L}\varDelta t$$

$\overline{v_x^2} = \frac{\overline{v^2}}{3}$ であるので

$$\varDelta U = \frac{nN_A mu\overline{v^2}}{3L}\varDelta t \quad \cdots③ \quad \cdots(答)$$

キ．ピストンの移動量は $u\varDelta t$ であるので，体積が減少することに注意して

$$\varDelta V = -uS\varDelta t \quad \cdots④ \quad \cdots(答)$$

ク．②，③式より

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{\dfrac{nN_A mu\overline{v^2}}{3L}\Delta t}{\dfrac{1}{2}nN_A m\overline{v^2}} = \frac{2u\Delta t}{3L}$$

④式より $u\Delta t = -\dfrac{\Delta V}{S}$ と，$L = \dfrac{V}{S}$ を代入して

$$\frac{\Delta U}{U} = -\frac{2\Delta V}{3V} \quad \cdots⑤ \quad \cdots(答)$$

ケ．$\Delta U = \dfrac{3}{2}nR\Delta T$ である。これと①式より

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta T}{T} \quad \cdots⑥ \quad \cdots(答)$$

コ．⑤，⑥式より

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{2\Delta V}{3V} \quad \cdots(答)$$

(参考)解説にあるように単原子分子理想気体の断熱変化では

$$TV^{\frac{2}{3}} = C \quad (ただし，C は定数)$$

が成り立つ。これを変形して V で微分してみよう。

$$T = \frac{C}{V^{\frac{2}{3}}}$$

$$\frac{dT}{dV} = -\frac{2}{3}\frac{C}{V \cdot V^{\frac{2}{3}}} = -\frac{2T}{3V}$$

となる。さらに変形して

$$\frac{dT}{T} = -\frac{2\Delta V}{3V}$$

となり，解答と一致する。