

図1のように一辺の長さが a の薄い正方形の極板2枚を、真空中で平行に間隔 d で並べたコンデンサーがある。真空の誘電率を ϵ_0 とする。このコンデンサーを電圧 V の電池に接続し充電する。

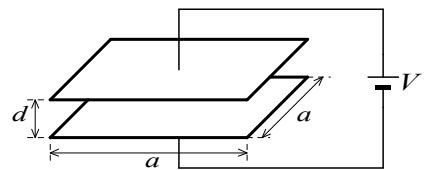


図 1

- (1)コンデンサーに蓄えられる電気量と静電エネルギーを求めよ。

次に電池を接続したまま、極板と同型で厚さが d の誘電体を、極板と辺をそろえてゆっくりと挿入する。誘電体の比誘電率を ϵ_r とする。図2のように長さ x だけ誘電体を挿入した状態を考える。

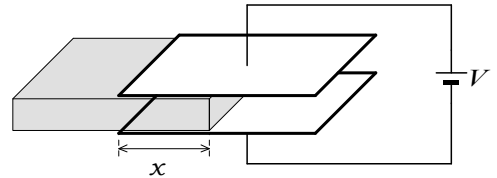


図 2

- (2)図2の状態、コンデンサーの容量を求めよ。
 (3)図2の状態、コンデンサーに蓄えられる電気量と静電エネルギーを求めよ。

図2の状態から、誘電体に力を加えゆっくりと長さ Δx だけさらに押し込む。

- (4)図2の状態から、コンデンサーに蓄えられた電気量と静電エネルギーの変化量を求めよ。
 (5)誘電体を Δx だけ押し込む間に、電池がした仕事を求めよ。
 (6)誘電体に外から加えた力がした仕事を求めよ。ただし、回路をつなぐ導線、電池の抵抗は無視でき、誘電体の挿入はゆっくりであるので、電力は消費しないものとする。そのため電池がした仕事と外から加えた力がした仕事の和が、コンデンサーの静電エネルギーの変化になるものとする。
 (7)誘電体に外から加えた力が一定であるとする。誘電体に働くコンデンサーの極板からの力の大きさと向きを求めよ。向きは誘電体を引き込む方向か、押し出す方向か答よ。

(解説)コンデンサーに誘電体を挿入すると、コンデンサーの静電エネルギーが変化する。これは、挿入するために加えた力がする仕事と、電池がした仕事の和である。

誘電体を挿入している途中では、誘電体のある部分とない部分の並列接続と考えればよい。電池を接続したままであるので、極板間の電圧は V である。

挿入するために加えた力がする仕事は負になる。つまり、誘電体を挿入する方向と逆方向の力が必要である。したがって、誘電体にコンデンサーから働く力は、誘電体を引き込む方向である。

(1)コンデンサーの容量 C_0 は

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 a^2}{d}$$

蓄えられた電気量 Q_0 と静電エネルギー U_0 はそれぞれ

$$Q_0 = C_0 V = \frac{\epsilon_0 a^2}{d} V \quad \dots(\text{答}), \quad U_0 = \frac{1}{2} C_0 V^2 = \frac{\epsilon_0 a^2}{2d} V^2 \quad \dots(\text{答})$$

(2)誘電体のある部分 (面積 ax) と、ない部分 (面積 $a(a-x)$) の並列接続と考える。容量 C は

$$C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 ax}{d} + \frac{\epsilon_0 a(a-x)}{d} = \frac{\epsilon_0 a \{(\epsilon_r - 1)x + a\}}{d} \quad \dots(\text{答})$$

(3)極板間の電圧は V であるので、蓄えられた電気量 Q と静電エネルギー U はそれぞれ

$$Q = CV = \frac{\epsilon_0 a \{(\epsilon_r - 1)x + a\}}{d} V \quad \dots(\text{答})$$

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{\epsilon_0 a \{(\epsilon_r - 1)x + a\}}{2d} V^2 \quad \dots(\text{答})$$

(4) Δx だけ押し込んだ後の蓄えられた電気量 Q' と静電エネルギー U' はそれぞれ(3)の結果より

$$Q' = \frac{\epsilon_0 a \{(\epsilon_r - 1)(x + \Delta x) + a\}}{d} V, \quad U' = \frac{\epsilon_0 a \{(\epsilon_r - 1)(x + \Delta x) + a\}}{2d} V^2$$

ゆえに、電気量の変化量 ΔQ と静電エネルギーの変化量 ΔU は

$$\Delta Q = Q' - Q = \frac{\epsilon_0 a (\epsilon_r - 1) V}{d} \Delta x \quad \dots(\text{答})$$

$$\Delta U = U' - U = \frac{\epsilon_0 a (\epsilon_r - 1) V^2}{2d} \Delta x \quad \dots(\text{答})$$

(5)電池を通過した電気量は ΔQ であるので、電池がした仕事 W_E は

$$W_E = \Delta Q \cdot V = \frac{\epsilon_0 a (\epsilon_r - 1) V^2}{d} \Delta x \quad \dots(\text{答})$$

(6)誘電体に外から加えた力がした仕事を W とすると

$$\Delta U = W_E + W$$

$$\therefore W = \Delta U - W_E = \frac{\epsilon_0 a (\epsilon_r - 1) V^2}{2d} \Delta x - \frac{\epsilon_0 a (\epsilon_r - 1) V^2}{d} \Delta x = -\frac{\epsilon_0 a (\epsilon_r - 1) V^2}{2d} \Delta x \quad \dots(\text{答})$$

(7)誘電体に外から加えた力の大きさを f とする。 $\epsilon_r > 1$ より加えた力がする仕事 W は負であるので、加えた力の向きは、押し込む方向と逆である。 f は一定であるとして

$$W = -f \Delta x = -\frac{\epsilon_0 a (\epsilon_r - 1) V^2}{2d} \Delta x$$

$$\therefore f = \frac{\varepsilon_0 a (\varepsilon_r - 1) V^2}{2d}$$

外から加えた力は、誘電体にコンデンサーから働く静電気力とつりあっているので、静電気力の大きさは f で向きは、誘電体を引き込む方向である。

$$f = \frac{\varepsilon_0 a (\varepsilon_r - 1) V^2}{2d} \quad \text{向き：誘電体を引き込む方向} \quad \dots(\text{答})$$

