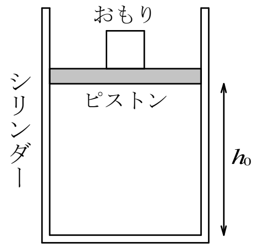
右図のように断面積 S のシリンダーが鉛直に置かれ，n モルの単原子分子理想気体がなめらかに動く軽いピストンでシリンダーに密封されている。ピストンの上に，質量 m のおもりを置く。温度 T_0 のとき，シリンダーの底から高さが h_0 の位置でピストンは静止した。この位置をつりあいの位置とする。大気圧を P_0，重力加速度の大きさを g として以下の問いに答えよ。ただし，必要に応じて $1 \gg x$ の時に成り立つ近似式



$$(1+x)^a \fallingdotseq 1+ax$$

用いよ。

〔A〕シリンダー，ピストンがともに十分に熱をよく伝え，シリンダー内の気体の温度は常に T_0 であるとする。

(1)ピストンがつりあいの位置にあるとき，気体の圧力を求めよ。

ピストンに手で力を加えて微少な距離だけ押し下げた。手を離すと，ピストンは上昇した。ピストンがつりあいの位置から距離 y だけ下の位置を通過する時を考える。

(2)ピストンに働く合力を求めよ。ただし，$h_0 \gg y$ とし，鉛直下向きを正とする。

(3)手を離した後，ピストンはどのような運動をするか答よ。

〔B〕次にシリンダー，ピストンがともに断熱材でできており，シリンダー内の気体と外部と熱のやりとりはないものとする。はじめの気体の温度は T_0 で，ピストンはつりあいの位置にあった。

ピストンに手で力を加えて距離 d だけ押し下げた。このとき気体は断熱変化をする。断熱変化の際の気体の圧力 P と体積 V の間には

$$PV^{\frac{5}{3}} = \text{一定}$$

という関係がある。

(4)ピストンを d だけ押し下げているとき，気体の圧力を求めよ。

(5)このときの気体の温度を求めよ。

ピストンを押し下げた距離 d が h_0 に比べて十分に小さいとき，手を離すとピストンは単振動をする。

(6)単振動の周期を求めよ。

（解説）断熱変化では　$PV^{\gamma}=$一定と同時に,

$$TV^{\gamma-1}=\text{一定}$$

が成り立つ。(5)はこれを用いる解法もある。

近似は目的を持って使うこと。この問題では，ピストンに働く力を求めるために近似を用いるが，分母をすっきりさせることが目的である。

質量 m の物体に働く力 f が，変位 x で定数を K として

$$f=-Kx$$

となる場合，物体は単振動をし，周期 T は

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

である。

(1)気体の圧力を P_1 とする。ピストンに働く力のつりあいより

$$P_0S+mg-P_1S=0 \qquad \therefore \quad P_1=P_0+\frac{mg}{S} \qquad \cdots(\text{答})$$

(2)気体の圧力を P とする。気体の体積は $S(h_0-y)$ である。温度一定なのでボイルの法則より

$$P_1Sh_0=PS(h_0-y)$$

$$\therefore \quad P=\frac{h_0}{h_0-y}P_1=\left(P_0+\frac{mg}{S}\right)\left(\frac{h_0}{h_0-y}\right)=\left(P_0+\frac{mg}{S}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{y}{h_0}}\right)$$

ここで $h_0 \gg y$ より，$1\gg\frac{y}{h_0}$ であるので近似を用いて

$$P=\left(P_0+\frac{mg}{S}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{y}{h_0}}\right)\fallingdotseq\left(P_0+\frac{mg}{S}\right)\left(1+\frac{y}{h_0}\right)$$

下向きを正としてピストンに働く力 f は

$$f=P_0S+mg-PS=P_0S+mg-\left(P_0+\frac{mg}{S}\right)\left(1+\frac{y}{h_0}\right)S=-\frac{P_0S+mg}{h_0}y \qquad \cdots(\text{答})$$

(3)ピストンに働く力 f は復元力であり，ピストンが単振動していることを示す。中心は $f=0$ の点であるのでつりあいの位置である。単振動の周期 T は

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{P_0S+mg}{h_0}}}=2\pi\sqrt{\frac{mh_0}{P_0S+mg}}$$

つりあいの位置を中心とし，周期 $2\pi\sqrt{\frac{mh_0}{P_0S+mg}}$ の単振動　　$\cdots$(答)

(4)気体の圧力を P_2 とする。断熱変化の式より

$$P_1(Sh_0)^{\frac{5}{3}}=P_2\{S(h_0-d)\}^{\frac{5}{3}}$$

$$\therefore \quad P_2=\left(\frac{h_0}{h_0-d}\right)^{\frac{5}{3}}P_1=\left(P_0+\frac{mg}{S}\right)\left(\frac{h_0}{h_0-d}\right)^{\frac{5}{3}} \qquad \cdots(\text{答})$$

(5)気体の温度をTとする。ボイル・シャルルの法則より

$$\frac{P_1 S h_0}{T_0}=\frac{P_2\{s(h_0-d)\}}{T}$$

$$\therefore\quad T=\frac{P_2\{S(h_0-d)\}}{P_1 S h_0}T_0=\left(\frac{h_0}{h_0-d}\right)^{\frac{2}{3}}T_0 \qquad \cdots(答)$$

(別解)断熱変化の際，温度Tと体積Vの間に単原子分子理想気体では

$$TV^{\frac{2}{3}}=一定$$

が成り立つ。これより

$$T_0(Sh_0)^{\frac{2}{3}}=T\{S(h_0-d)\}^{\frac{2}{3}} \qquad \therefore\quad T==\left(\frac{h_0}{h_0-d}\right)^{\frac{2}{3}}T_0$$

(6)手を離した後，ピストンがつりあいの位置から距離 y だけ下の位置を通過する時を考える。このときの気体の圧力をP'とすると，(4)と同様に

$$P'=\left(P_0+\frac{mg}{S}\right)\left(\frac{h_0}{h_0-y}\right)^{\frac{5}{3}}$$

$h_0 \gg y$より，近似を用いて

$$P'=\left(P_0+\frac{mg}{S}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{y}{h_0}}\right)^{\frac{5}{3}} \fallingdotseq \left(P_0+\frac{mg}{S}\right)\left(1+\frac{5y}{3h_0}\right)$$

これよりピストンに働く力f'は，下向きを正として

$$f=P_0S+mg-P'S=P_0S+mg-\left(P_0+\frac{mg}{S}\right)\left(1+\frac{5y}{3h_0}\right)S=-\frac{5(P_0S+mg)}{3h_0}y$$

これより，単振動の周期T'は

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{5(P_0S+mg)}{3h_0}}}=2\pi\sqrt{\frac{3mh_0}{5(P_0S+mg)}} \qquad \cdots(答)$$