図１のように，なめらかな水平面上に，軽くて伸び縮みしない長さ $2l$〔m〕の棒でつながった質量 m〔kg〕の2個の小球A，Bが y 軸に平行に置かれている。いま，小球Bに x 軸の正の向きに初速度 $\overrightarrow{V_0}$〔m/s〕($\left|\overrightarrow{V_0}\right| = V_0$〔m/s〕)を与えた。その後の小球A，Bの運動について，以下の問いに答えよ。

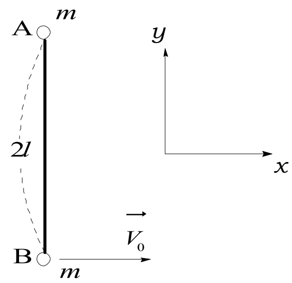


図１

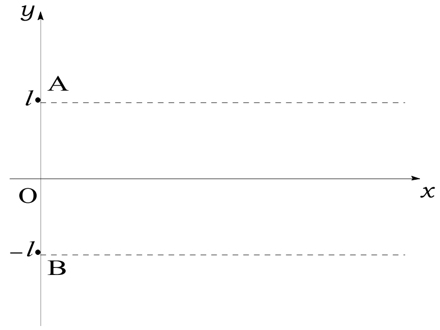
問1　棒の中点の速度は，小球 A，B の速度の平均に等しい。このことを用いて棒の中点の速度を求め，棒の中点は x 軸の正の向きに等速直線運動することを示せ。

問2　棒の中点から見た小球A，Bの速さを求めよ。

問3　小球 A，B の運動は棒の中点から見ると円運動であることを考慮して，棒の張力の大きさを求めよ。

問4　時刻 t〔s〕($t \geqq 0$)における小球 A，B の位置を求めよ。さらに，小球 A，B の運動の経路の概略を解答用紙のグラフに描け。ただし，小球 B に初速度を与えた時刻を　$t = 0$ とし，その時の棒の中点の位置を座標の原点にとるものとする。

〔解答欄〕



次に，棒をその中点で切断してから，棒の切断部を質量 M〔kg〕の小球 P に接合し，図 2 のように y 軸に平行に置いた。棒は，小球Pとの接合部で自由に回転できるようにしてある。小球Pに x 軸の正の向きに初速度 $\overrightarrow{V_0}$ を与えてからしばらくすると，図3のように小球A，Bが衝突した。小球 A，B が衝突する直前について，以下の問いに答えよ。

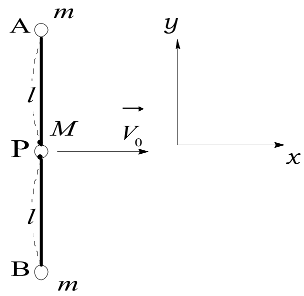


図２

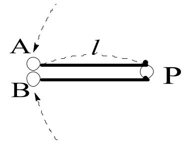


図３

問 5　小球 P の速度を求めよ。

問 6　小球 P から見た小球 A，B の速さを求めよ。

問 7　小球 P の加速度の大きさと棒の張力の大きさを求めよ。

（解説）外力が働いていない体系の重心の速度は変化しない。したがって重心から見ると慣性系であり，静止している場合と同様に考えてよい。前半のような棒の両端にある質点の運動を重心から見ると，円運動をするだけである。
また，体系全体の運動量も保存する。

問 1．ある時刻での小球 A，B の速度をそれぞれ$\overrightarrow{V_A}$，$\overrightarrow{V_B}$とする。棒の中点の速度$\overrightarrow{V_M}$は，A，B の速度の平均なので

$$\overrightarrow{V_M}=\frac{\overrightarrow{V_A}+\overrightarrow{V_B}}{2} \quad \cdots①$$

また運動量保存則より　$m\overrightarrow{V_0}=m\overrightarrow{V_A}+m\overrightarrow{V_B}$

$$\therefore \quad \overrightarrow{V_0}=\overrightarrow{V_A}+\overrightarrow{V_B} \quad \cdots②$$

①，②式より　$\overrightarrow{V_M}=\dfrac{\overrightarrow{V_A}+\overrightarrow{V_B}}{2}=\dfrac{\overrightarrow{V_0}}{2}$　…(答)

ゆえに中点は x 軸正方向に等速直線運動をする。　…(答)

問 2．球 B を動かした瞬間，棒の中点から見た小球 A，B の相対速度をそれぞれ$\overrightarrow{u_A}$，$\overrightarrow{u_B}$とすると

$$\overrightarrow{u_A}=0-\overrightarrow{V_M}=0-\frac{\overrightarrow{V_0}}{2}=-\frac{\overrightarrow{V_0}}{2}$$

$$\overrightarrow{u_B}=\overrightarrow{V_0}-\overrightarrow{V_M}=\overrightarrow{V_0}-\frac{\overrightarrow{V_0}}{2}=\frac{\overrightarrow{V_0}}{2}$$

となり，図 1 のようになる。中点は等速直線運動をするので慣性系であり，静止している座標系と同じ運動法則が成り立つ。ゆえに，中点から見て小球 A，B は棒の中点を中心とする等速円運動をする。したがって中点から見た小球 A，B の速さは一定で$\dfrac{V_0}{2}$である。

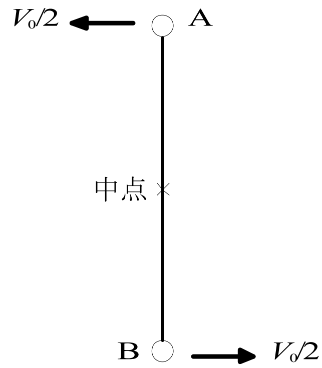


図１

A，B 共に速さ　$\dfrac{V_0}{2}$〔m/s〕　…（答）

問 3．中点から見ると A，B は中点を中心として半径 l，速さ$\dfrac{V_0}{2}$の等速円運動をすることになる。棒の張力を F〔N〕とすると，円運動の運動方程式より

$$m\frac{\left(\dfrac{V_0}{2}\right)^2}{l}=F$$

$$F=\frac{mV_0^2}{4l}\text{〔N〕} \quad \cdots(答)$$

問４．中点から見た A，B の円運動の角速度 ω〔rad/s〕は

$$\omega=\frac{\dfrac{V_0}{2}}{l}=\frac{V_0}{2l}$$

中点から見た円運動の式をまず考える。棒の中点と共に動く座標系を考え，中点を原点 O'として，x 軸に平行に x'軸を，y 軸に平行に y'軸をとる。この座標系で小球は原点 O'を中心とする等速運動円運動で図 2 のようになる。時刻 t の時の

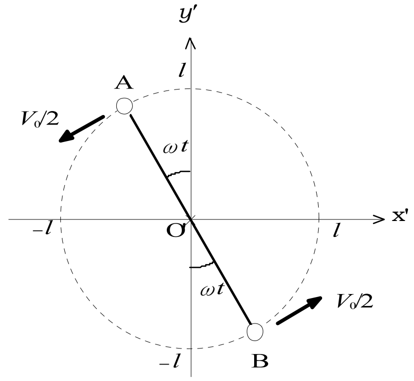


図２

回転角は ωt であるので，このときの小球 A，B の位置は

A： $x'=-l\sin\omega t$ ， $y'=l\cos\omega t$ B： $x'=l\sin\omega t$ ， $y'=-l\cos\omega t$

となる。水平面上に固定した座標系から見ると，時刻 t での棒の中点の位置は

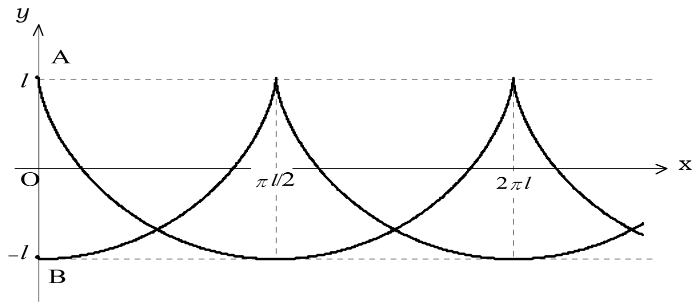
$x=\frac{V_0}{2}t$ ， $y=0$ である。ゆえに，水平面上での小球の位置は

$$x=\frac{V_0}{2}t+x' \quad , \quad y=y'$$

で求められるので

A： $x=\frac{V_0}{2}t-l\sin\frac{V_0}{2l}t$， $y=l\cos\frac{V_0}{2l}t$ B： $x=\frac{V_0}{2}t+l\sin\frac{V_0}{2l}t$， $y=-l\cos\frac{V_0}{2l}t$ …(答)

これをグラフにして



このような運動で小球が描く軌跡はサイクロイド曲線と呼ばれる。

問 5. 外力が働かないので，小球 P，A，B からなる物体系全体の運動量が保存する。また A と B が衝突する直前，P，A，B の x 方向の速さは等しくなる。衝突直前の小球 P の速度の x 成分の大きさを V_x〔m/s〕とする。小球 A，B の速度の x 成分の大きさも V_xである。x方向の運動量保存則より

$$MV_0=(M+2m)V_x \qquad \therefore \quad V_x=\frac{M}{M+2m}V_0 \text{〔m/s〕} \qquad \cdots① \quad \cdots(答)$$

問６．水平面との間に摩擦が働かないので，力学的エネルギーも保存する。P から見て小球 A は y 軸負方向，小球 B は y 軸正方向に動き，速さは対称性から共に V_y〔m/s〕とする。水平面上から見て力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}MV_0^2=\frac{1}{2}MV_x^2+\frac{1}{2}m\left(V_x^2+V_y^2\right)\times 2$$

①式の V_xを用いて解いて $V_y=\sqrt{\frac{M}{M+2m}}V_0$〔m/s〕 …(答)

問７．P の加速度を x軸正の向きに α〔m/s²〕，棒の張力の大きさを F'〔N〕とすると，棒の運動方程式より

$$M\alpha=-2F' \qquad \cdots②$$

P から見ると，衝突の直前，小球 A，B は半径 l，速さ V_yの円運動をしている。P から見た小球に対する円運動の運動方程式より，慣性力を含めて

$$\frac{mV_y^2}{l}=F'-m\alpha \qquad \cdots③$$

②，③式より

$$\alpha=-\frac{2mV_y^2}{(M+2m)l}=-\frac{2mMV_0^2}{(M+2m)^2 l} \text{〔m/s²〕} \quad , \quad F'=\frac{M^2mV_0^2}{(M+2m)^2 l} \text{〔N〕} \qquad \cdots(答)$$