質量M〔kg〕, 一辺a〔m〕の立方体の木片を質量m〔kg〕の弾丸で打つ実験を行った。その際, 木片や弾丸の自転運動や空気による摩擦の影響は無視できるものとする。次のⅠ, Ⅱ, Ⅲの場合について各問いに答えよ。Ⅰ, Ⅱについては弾丸の運動に対する重力の影響は無視できるものとする。

Ⅰ　最初, 図1のように木片を固定し, 弾丸を速さv_0〔m/s〕で面に垂直に当てると, 深さd〔m〕まで入り込んで止まった。このとき, 以下の問いに答えよ。ただし, 弾丸の大きさは入り込んだ深さに比べて無視できるものとする。

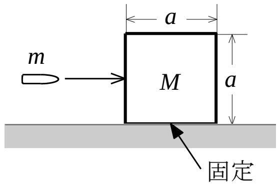

図１

問1　弾丸が木片に入り込んで進むとき, 弾丸の受ける抵抗力は常に一定であるとする。そのときの抵抗力の大きさを求めよ。

問2　弾丸が木片を貫通するには, 弾丸の速さはいくら以上でなければならないか。衝突直前の最小の速さを求めよ。

Ⅱ　次に, 図2のようにこの木片を滑らかな床の上に置き, 水平方向のみに自由に動き得るようにしておく。弾丸を木片の面に垂直に水平方向に当てる場合について, Ⅰの結果を用いて以下の問いに答えよ。なお, 弾丸が木片に入り込むときの抵抗力の大きさはⅠの場合と同じとする。

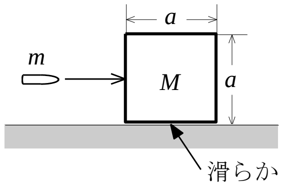

図２

問3　弾丸がⅠと同じ速さv_0で衝突すると, 木片に入り込み, 一体となって一定の速さで動いた。その速さを求めよ。また, 当てた弾丸が入り込んだ深さを求めよ。

問4　弾丸が木片を貫通するための衝突直前の最小の速さを求めよ。

Ⅲ　図3に示すように, この木片が地上h〔m〕の高さのところを速さV〔m/s〕で水平に飛んでいる瞬間に, 下方から鉛直上方にこの弾丸を速さv_0で当てた。弾丸は木片に入り込み, 一体となって放物線を描きながら地面に落下した。弾丸が木片に入る込む時間はきわめて短く, この間の重力による力積は無視できる者とする。重力の加速度をg〔m/s^2〕として以下の問いに答えよ。ただし, 飛行距離については, 木片や弾丸の大きさは無視できるものとする。

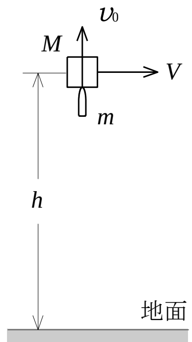

図３

問5　木片の打たれた地点から地面に落ちた地点までの水平距離を求めよ。

問6　木片が最高点に到達したときの地面からの高さを求めよ。

（解説）弾丸が木片に入り込むとき，抵抗力がはたらくので，エネルギー保存則は成り立たない。しかし，弾丸と木片からなる物体系を考えると，抵抗力は内力であるので物体系の運動量は保存する。

（解答）Ⅰ．問 1　抵抗力の大きさを f とする。弾丸には進行方向と逆向きに抵抗力がはたらくので，止まるまでに抵抗力がした仕事は $-fd$ である。エネルギーと仕事の関係より

$$0-\frac{1}{2}mv_0^2=-fd \qquad \therefore \qquad f=\frac{mv_0^2}{2d}\text{〔N〕} \qquad \cdots\text{（答）}$$

問 2. 貫通するための弾丸の速さの最小値を v_1 とする。貫通するまでに抵抗力がする仕事は $-fa$ であるので

$$0-\frac{1}{2}mv_1^2=-fa$$

f を代入して

$$v_1=v_0\sqrt{\frac{a}{d}}\text{〔m/s〕} \qquad \cdots\text{（答）}$$

問 3. 一体となった時の速さを V とする。運動量保存則より

$$mv_0=(M+m)V \qquad \therefore \qquad V=\frac{m}{M+m}v_0\text{〔m/s〕} \qquad \cdots\text{（答）}$$

弾丸が入り込んだ深さを d' とする。抵抗力が弾丸と木片にした仕事の和は $-fd'$（※）である。エネルギーと仕事の関係より

$$\frac{1}{2}(M+m)V^2-\frac{1}{2}mv_0^2=-fd'$$

$$\frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{mv_0}{M+m}\right)^2-\frac{1}{2}mv_0^2=-\frac{mv_0^2}{2d}d' \qquad \therefore \qquad d'=\frac{M}{M+m}d\text{〔m〕} \qquad \cdots\text{（答）}$$

※：弾丸が衝突してから木片と一体になるまでに，木片が距離 D だけ移動したとする。弾丸は $D+d'$ だけ移動することになる。この間，抵抗力は弾丸には進行方向と逆向きに，木片には進行方向にはたらく。ゆえに，弾丸と木片に対して抵抗力がする仕事をそれぞれ W_1，W_2 とすると

$$W_1=-f(D+d') \quad , \quad W_2=fD$$

となる。ゆえに，弾丸と木片にはたらく仕事の和は

$$W_1+W_2=-f(D+d')+fD=-fd'$$

となり，この仕事だけ弾丸と木片の運動エネルギーの和が変化する。

問 4. 貫通するための丸の速さの最小値を v_2 とする。問 3 と同様に

$$\frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{mv_2}{M+m}\right)^2-\frac{1}{2}mv_2^2=-fa=-\frac{mv_0^2}{2d}a \qquad \therefore \qquad v_2=v_0\sqrt{\frac{(M+m)a}{Md}}\text{〔m/s〕} \cdots\text{（答）}$$

問 5. 問題文にあるように，重力による力積が無視できるとすると，弾丸，木片からなる物体系の運動量は保存する。衝突後の物体の速度の水平成分，鉛直成分の大きさをそれぞれ V_x, V_y とすると，運動量保存則より

$$\text{水平方向：}\quad MV=(M+m)V_x \qquad \therefore \qquad V_x=\frac{M}{M+m}V$$

$$\text{鉛直方向：}\quad mv_0=(M+m)V_y \qquad \therefore \qquad V_y=\frac{m}{M+m}v_0$$

一体となった物体は，この初速度で高さ h の点から斜方投射される。地面に落下するまでの時間を t とすると，$t>0$ も考慮して

$$h+V_yt-\frac{1}{2}gt^2=0$$

$$t^2-\frac{2V_y}{g}t-\frac{2h}{g}=0 \qquad \therefore \qquad t=\frac{V_y+\sqrt{V_y^2+2gh}}{g}$$

水平距離は

$$V_x t=V_x\cdot\frac{V_y+\sqrt{V_y^2+2gh}}{g}=\frac{MV}{(M+m)g}\left\{\frac{m\upsilon_0}{M+m}+\sqrt{\left(\frac{m\upsilon_0}{M+m}\right)^2+2gh}\right\}\text{〔m/s〕}\cdots\text{(答)}$$

問 6. 一体となった点から最高点までの高さを H とすると

$$V_y^2=2gH \qquad \therefore \qquad H=\frac{V_y^2}{2g}$$

地面からの高さは

$$h+H=h+\frac{V_y^2}{2g}=h+\frac{1}{2g}\left(\frac{m\upsilon_0}{M+m}\right)^2\text{〔m〕} \qquad \cdots\text{(答)}$$